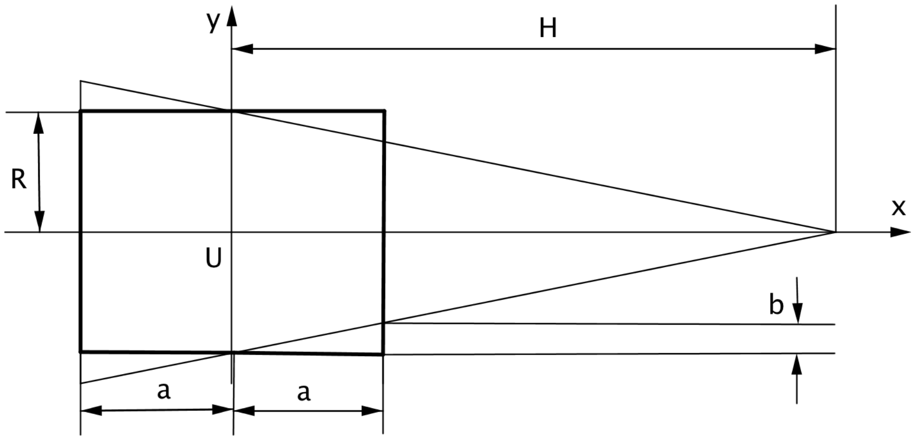
Berechnung zur Näherungsformel für den Drehkegelstumpf

Im Beitrag „Der Rechnungsstock des Forstmannes“ wird zu der dort verwendeten Näherungsformel bemerkt, dass das damit berechnete Volumen immer etwas kleiner ist als das Volumen des Drehkegelstumpfes. Das soll nun bewiesen werden.



Zunächst ist zu beachten, dass in dieser Figur die Bezeichnung eine andere ist als beim Rechnungsstock. Mit den neuen Bezeichnungen ändern sich die dortigen Formeln auf

$$V_Z = 2R^2.\pi.a \text{ und } V_S = \frac{2R^2.a.\pi}{3H^2}.(3H^2 + a^2)$$

(V_S wurde als Differenz der Volumina der Drehkegel mit den Radien R + b bzw. R – b und den Höhen H + a bzw. H – a berechnet, das b ergibt sich aus der Proportion R : H = b : a.)

Im Prinzip genügt es für den Beweis, die Differenz $V_S - V_Z$ zu berechnen, wobei sich dann sofort herausstellt, dass diese positiv ist. Im Folgenden wird aber mit Hilfe der Integralrechnung auch noch gezeigt, warum das so ist.

Zu diesem Zweck sind die Volumina $V_A = \pi.\int_{-a}^{0} y^2dx - R^2.\pi.a$ und $V_I = R^2.\pi.a - \pi.\int_{0}^{a} y^2dx$ gegeneinander aufzurechnen, wobei V_A bzw. V_I das Volumen des außerhalb/innerhalb des Drehzylinders liegenden Kegelstumpf-Teilstücks darstellt, und y = f(x) ist die Funktionsgleichung der Geraden mit der Abstandsform x/H + y/R = 1, also $y = R - \frac{R}{H}.x$ und $y^2 = R^2 - \frac{2R^2}{H}.x + \frac{R^2}{H^2}.x^2$

Daraus folgt: $V_A = -\pi.(-R^2.a - \frac{R^2}{H}.a^2 - \frac{R^2}{3H^2}.a^3) - R^2.\pi.a = \frac{R^2.\pi.a}{3H^2}.(3H^2 + 3H.a + a^2) - R^2.\pi.a$

$$V_I = R^2.\pi.a - \pi.(R^2.a - \frac{R^2}{H}.a^2 + \frac{R^2}{3H^2}.a^3) = R^2.\pi.a - \frac{R^2.\pi.a}{3H^2}.(3H^2 - 3H.a + a^2)$$

Der gesuchte Beweis ist erbracht, wenn $V_A - V_I$ einen positiven Wert ergibt, weil dann der beim Drehzylinder wegfallende Teil mit dem Volumen V_A größer ist als der hinzukommende Teil mit dem Volumen V_I. Und tatsächlich gilt

$$V_A - V_I = \boxed{\frac{2R^2.\pi.a^3}{3H^2} > 0}$$

Zur Probe und als praktische Anwendung mag das Beispiel zum Rechnungsstock dienen, bei dem R = 7,5 Zoll und a = 20 Fuß ist, was ein Näherungsvolumen $V_Z \approx 49{,}09$ Kubikfuß ergibt. (Die Differenz zum Ergebnis, das der Rechnungsstock liefert, beruht auf der Rundung des Flächeninhaltes des Kreises mit dem Radius R = 7,5 Zoll.)

Für die weitere Rechnung wird der Wert H benötigt, welcher sich aus der Proportion R : H = b : a ergibt, in der b die Differenz zwischen R = 7,5 Zoll und dem Radius des Kreises mit dem Radius r = 6 Zoll ist, also b = 1,5 Zoll. Darauf folgt (in Zoll gerechnet) 7,5 : H = 1,5 : 20.12 und H = 1200 Zoll = 100 Fuß. Das macht nach der eingangs genannten Formel für V_S einen Wert von ungefähr 49,74 Kubikfuß und die oben hergeleitete Formel für die Differenz $V_A - V_I$ ergibt einen Wert von ca. 0,65 Kubikfuß.

Probe: 49,74 – 0,65 = 49,09, die Maßzahl für das nach der Näherungsformel berechnete Volumen des „Blochs“. Die Abweichung beträgt also ca. 1,3 Prozent.