Ein „kniffliges“ Beispiel zur Integralrechnung

Von Dieter Grillmayer

Im Lehrbuch „Mathematik verstehen 8“ befindet sich ein Beispiel (2.64f) zur Integralrechnung, zu dem mich meine vor der Matura stehende Enkelin Ylvi um Rat gefragt hat. Da ich mit einem solchen Beispiel in meinem ganzen Berufsleben noch nie konfrontiert worden bin, hat es doch ein wenig gedauert, ehe ich den unten geschilderten Lösungsweg gefunden habe. Die Angabe, in der ich f(x) gleich durch y ersetzt habe, lautet wie folgt:

Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = (x + a)^2$ mit $0 \leq x \leq a$ rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

Die komplette Funktionskurve ist eine Parabel mit dem Scheitel A(-a/0), von der nur der Ast rechts der y-Achse, beginnend mit dem Punkt S(0/a^2), in Frage kommt. Der Kerngedanke für die Lösung ist, bei der Funktionsgleichung links und rechts die Wurzel zu ziehen, wodurch sich $\sqrt{y} = x + a$ ergibt. Diese Gleichung mit der Definitionsmenge $0 \leq x \leq a$ bestimmt genau den genannten Parabelast und erlaubt folgende Umformungen:

$$x = \sqrt{y} - a \Rightarrow x^2 = y - 2a.\sqrt{y} + a^2$$

Ab hier ist alles nur mehr Routine, lediglich die Grenzen u und o sind noch als y-Werte für x = 0 ($\Rightarrow u = a^2$) und x = a ($\Rightarrow o = 4a^2$) festzulegen. Die Rechnung lautet demnach:

$$V = \pi \cdot \int_{a^2}^{4a^2} x^2 \cdot dy =$$

$$\pi \cdot \int_{a^2}^{4a^2} (y - 2a.\sqrt{y} + a^2) \cdot dy =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{y^2}{2} - 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} + a^2 \cdot y\right]_{a^2}^{4a^2} =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{16a^4}{2} - 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{64a^6} + 4a^4 - \frac{a^4}{2} + 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{a^6} - a^4\right] =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{15a^4}{2} - 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 8a^3 + 3a^4 + 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3\right] =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{21a^4}{2} - \frac{32}{3} \cdot a^4 + \frac{4}{3} \cdot a^4\right] =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{63a^4}{6} - \frac{56a^4}{6}\right] =$$

$$\frac{7a^4\pi}{6}$$