Ein schönes Beispiel zur Algebra und zur Infinitesimalrechnung

In einem Mathematik-Lehrbuch für die 8. Klasse AHS habe ich das folgende Beispiel gefunden, in welchem sowohl wichtige Regeln zum Auflösen von Polynomgleichungen als auch Grundkenntnisse zur Differental- und zur Integralrechnung anwendbar sind:

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = 1/8.\ (x^3 - 6x^2 + 32)$ und die Gerade g: $x - 2y + 2 = 0$.
1. Zeige, dass die Gerade g durch den Wendepunkt W des Graphen von f geht!
2. Berechne die beiden anderen Schnittpunkte der Geraden mit dem Graphen von f!
3. Zeige, dass die Gerade g vom Graphen von f zwei Flächenstücke mit gleichem Inhalt abschneidet!

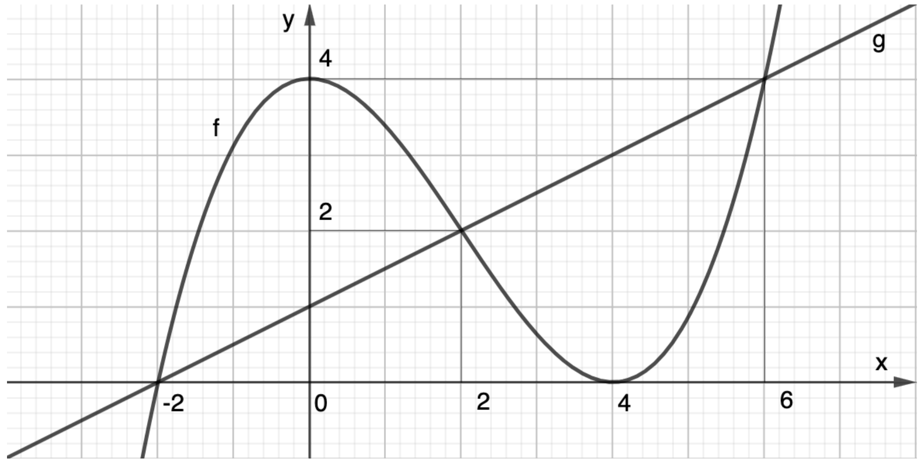
Zu Punkt 1: Betrifft Differentialrechnung, erste bis dritte Ableitung

$f'(x) = \frac{1}{8} \cdot (3x^2 - 12x) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{8} \cdot (6x - 12) = 0 \Rightarrow x_W = 2 \Rightarrow y_W = 2 \Rightarrow W(2/2)$, die dritte Ableitung $f'''(2) = \frac{3}{4}$ ist positiv. In die Gleichung von g eingesetzt ergeben die Koordinaten von W eine wahre Aussage $0 = 0$. (Die Lösungen $x_H = 0$ und $x_T = 4$ der Gleichung $f'(x) = 0$ lassen zusammen mit $f''(0) = -\frac{3}{2}$ und $f''(4) = \frac{3}{2}$ auf den Hochpunkt H(0/4) und den Tiefpunkt T(4/0) schließen.)

Zu Punkt 2: Betrifft Algebra, Auflösung einer Gleichung dritten Grades, von welcher eine Lösung ($x_W = 2$) bekannt ist. Die Geradengleichung kann auf $y = \frac{x}{2} + 1$ umgeformt werden.

$y = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 6x^2 + 32) = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 32 = 4x + 8 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$
$(x^3 - 6x^2 - 4x + 24) : (x - 2) = x^2 - 4x - 12$
$\underline{x^3 - 2x^2}$ abziehen
$- 4x^2 - 4x + 24$
$\underline{- 4x^2 + 8x}$ abziehen
$- 12x + 24$
$\underline{- 12x + 24}$ abziehen, ergibt 0

Die Gleichung $x^2 - 4x - 12 = 0$ hat nach „Standardformel“ die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$, daher hat die Funktionskurve mit der Geraden g auch die Punkte $S_1(-2/0)$ und $S_2(6/4)$ gemeinsam.



Zu Punkt 3: Integralrechnung, Berechnung des Flächeninhalts eines unter einer Funktionskurve mit nichtnegativen y-Werten und der x-Achse zwischen den Grenzen a und b liegenden Flächenstücks.

Im Prinzip belegt die Zeichnung bereits den zu berechnenden Sachverhalt, da die Funktionskurve bezüglich ihres Wendepunktes W zentrisch symmetrisch ist. Nach den „allgemeinen" Integrationsregeln und der Regel über Potenzen, wonach x^r (mit $r \in R - \{-1\}$) zu $\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$ wird, folgt aus $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 6x^2 + 32)$ die Stammfunktion $F(x) = = \frac{1}{8} \cdot (\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x) + C$.

Danach gilt für die linke unter der Kurve liegende Fläche $A_L = \frac{1}{8} \cdot \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x\right) \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 32 \cdot 2 - \frac{(-2)^4}{4} + 2 \cdot (-2)^3 - 32 \cdot (-2)\right) = \frac{1}{8} \cdot (4 - 16 + 64 - 4 - 16 + 64) = \frac{1}{8} \cdot 96 = 12$ und für die rechte unter der Kurve liegende Fläche gilt $A_R = \frac{1}{8} \cdot \int_{2}^{6} \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x\right) \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{6^4}{4} - 2 \cdot 6^3 + 32 \cdot 6 - \frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 32 \cdot 2\right) = \frac{1}{8} \cdot (324 - 432 + 192 - 4 + 16 - 64) = \frac{1}{8} \cdot 32 = 4$. Hinsichtlich des gesuchten Flächeninhalts A ist von A_L laut Zeichnung allerdings der Flächeninhalt $A_D = 4$ des rechtw. Dreiecks mit den Kathetenlängen 4 und 2 abzuziehen und rechts besteht A aus den Flächenhalt $A_T = 12$ eines Trapezes mit der Höhe 4 und den Parallelseitenlängen 2 und 4 minus A_R. Das ergibt also in beiden Fällen einen Flächeninhalt vom A = 8 Flächeneinheiten.