Turmdächer und Rhombendodekaeder

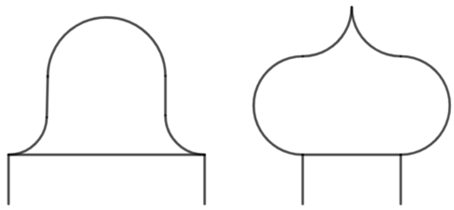
Von Dieter Grillmayer

In dieser kleinen Arbeit beschäftige ich mich, ausgehend von *viergiebeligen Dachformen*, vor allem mit *Rhombendächern* und, davon abgeleitet, mit allen Polyedern, die von zwölf *Rhomben*, auch *Rauten* genannt, begrenzt werden, selbst wenn diese nicht alle kongruent sind. In der wissenschaftlichen Literatur werden aber nur Letztere als *Rhombendodekaeder* bezeichnet.

Turmdächer:

Dieses Thema ist nahezu unerschöpflich, und zwar auch dann, wenn man sich dabei auf ebene Dachflächen über quadratischem Grundriss beschränkt.

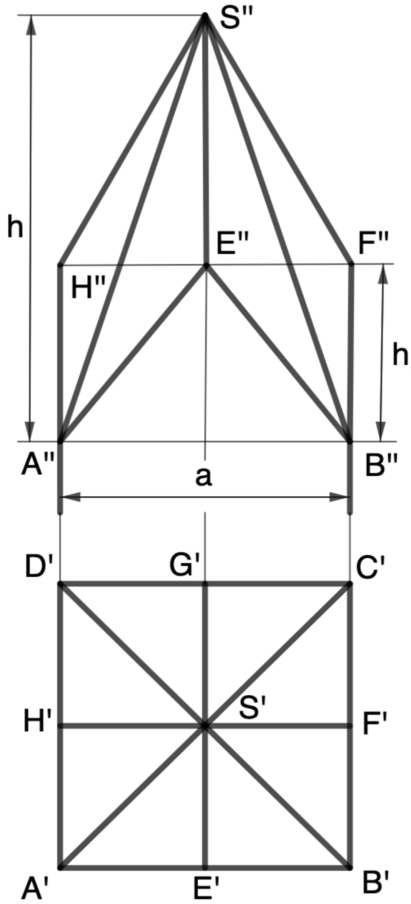
Dazu kommt nämlich noch eine Vielzahl von *Turmhelmen* mit krummen Dachflächen. Das Bild rechts zeigt Normalrisse eines *Glockendaches* und eines (einfachen) *Zwiebeldaches* auf eine lotrechte Bildebene. Geometrisch interessant sind vor allem die durch Verschneidung von Zylinderflächen mit waagrechten Erzeugenden gebildeten Helme.



Aber auch bei der genannten Beschränkung reicht die Palette noch vom einfachen *Satteldach* mit zwei gemauerten *Giebeln* in Form gleichschenkliger Dreiecke, deren Scheitelpunkte den waagrechten *Dachfirst* begrenzen, über das *Zeltdach*, welches aus den vier Mantelflächen einer regelm. quadratischen Pyramide besteht, bis zu recht aufwändigen Konstruktionen.

Viergiebelige Dachformen:

Diese bemerkenswerte Teilmenge ebenflächiger Turmdächer wird – mit Ausnahme des Rhombendaches – von acht kongruenten dreieckigen Dachflächen gebildet. Die nebenstehende Zeichnung zeigt den über dem Basisquadrat ABCD mit der Seitenlänge a aufgebauten Turmhelm mit den vier Giebelscheiteln E, F, G und H sowie der Spitze S. Mittels a, der Giebelhöhe h_1 und der Gesamthöhe h sowie der Diagonalenlänge $d = a\cdot\sqrt{2}$ lassen sich nach Pythagoras alle Kantenlängen berechnen, welche hier und im Weiteren mit s für die acht Giebelkanten, im Hinblick auf später mit e für die vier langen zur Spitze S führenden Kanten und mit k für die vier kürzeren nach S führenden Kanten bezeichnet werden:



$$\boxed{s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h_1^2}, \quad e = \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (h - h_1)^2}}$$

Je nach der Größe des Verhältnisses $h : h_1$ ergeben sich folgenden vier Dachformen:

1. Für $h = h_1$ handelt es sich um die Durchdringung zweier Satteldächer, die als *Kreuzdach* bezeichnet wird und keine wirkliche Spitze hat. S ist der Schnittpunkt der beiden Firstkanten.

2. Für $h_1 < h < 2h_1$ bilden die vier von den Basispunkten nach S führenden Kanten *Rinnen*, auf welche das Wasser zuläuft und wird diese Dachform als *Faltdach* bezeichnet.

3. Für $h = 2h_1$ vereinigen sich je zwei der an den Kanten AS, BS, CS bzw. DS miteinander verbundenen Dreiecke zu vier Rhomben und entsteht das auch als *Rautendach* oder (wegen des im deutsch-holländischen Rheinland häufigen Vorkommens) als *Rheinischer Helm* bezeichnete Rhombendach, weswegen $s = k = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h_1^2}$ gilt. Das Symbol e für die Länge der von den Punkten des Basisquadrats nach S führenden Kanten ist im Hinblick darauf gewählt worden, dass es sich in diesem Fall um das Maß der längeren Diagonalen der vier Rhomben handelt. Die Länge f der kürzeren Diagonale stimmt, wie die nächste Zeichnung veranschaulicht, mit der Seitenlänge des Quadrats EFGH überein, sodass also $f = \frac{d}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ gilt.

4. Für $h > 2h_1$ bilden die Kanten AS, BS, CS und DS *Grate,* von denen das Wasser wegläuft. Je größer das Verhältnis $h : h_1$, umso spitzer wird der Turm, weshalb in diesem Fall auch von einem *Nadelhelm* gesprochen wird.

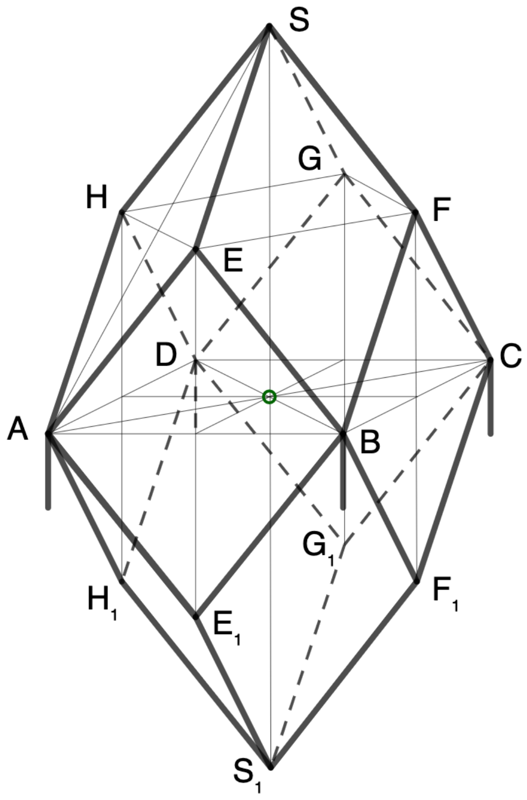
Die obigen – dem Internet entnommenen – Bilder zeigen recht eindrucksvoll zwei praktische Beispiele zu dem bislang theoretisch abgehandelten Thema.

Das linke Bild ist ein beliebtes Photomotiv, nämlich die katholische Pfarrkirche von Heiligenblut in Oberkärnten, und rechts dahinter steht der Großglockner. Der Nadelhelm ist bei dieser Kirche besonders ausgeprägt und beeindruckend.

Das rechte Bild zeigt den Turm der ältesten evangelischen Pfarrkirche in der Altstadt von Hannover, der sogenannten *Marktkirche*. Er ist mir anlässlich eines Besuches der Hauptstadt von Niedersachsen wegen der Exklusivität seines Daches besonders aufgefallen und in Erinnerung geblieben. Ein steiles Kreuzdach wird in dessen Mitte von einem Türmchen mit quadratischem Querschnitt durchdrungen, welches einen Nadelhelm trägt. Im Unterschied zu dieser Dachkonstruktion kann man Durchdringungen eines Kreuzdaches mit koachsialen quadratischen, sechsseitigen oder achtseitigen Pyramiden häufig beobachten.

Rhombendächer und davon abgeleitete Rhombendodekaeder:

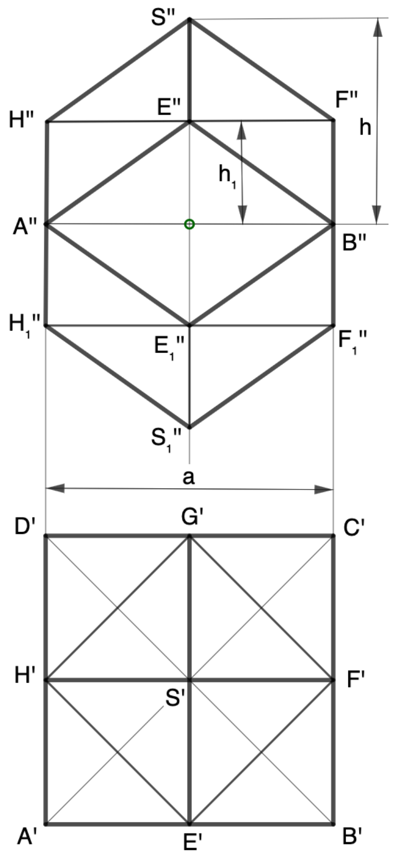
Der Frontalriss rechts (ohne entsprechende Kennzeichnung der Bildpunkte) zeigt ein Rhombendach über vier Giebeln mit den Maßen a, h_1 und $h = 2h_1$, wie bereits angegeben. Anlässlich von dessen Darstellung ist mir die Idee gekommen, die vier Rhomben an der Trägerebene des Quadrats ABCD zu spiegeln. Das dadurch zustande kommende Polyeder wird von zwölf Rhomben mit den Seitenlängen $s = k = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h_1^2}$ begrenzt. Jeder so zustande kommende Körper besitzt 14 Ecken, durch sechs von ihnen laufen je vier Kanten und durch acht Ecken laufen je drei Kanten. Mit insgesamt 24 Kanten ist der EULERsche Polyedersatz (12 + 14 = 24 + 2) erfüllt.



In diesem allgemeinen Fall treten zwei verschiedene Rhombenformen auf: Die Diagonalen der acht schrägen Flächen weisen, wie schon angegeben, die Längen $e = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 4h_1^2}$ und $f = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ auf, während für die vier lotrechen Rhomben die Diagonalenlängen $e_1 = a$ und $f_1 = 2h_1$ aus der Zeichnung abzulesen sind.

Das von zwölf kongruenten Rhomben begrenzte Dodekaeder:

Abschließend soll jenes Rhombendodekaeder behandelt werden, bei dem alle zwölf Begrenzungsflächen deckungsgleich sind.



Dazu muss die Diagonalenlänge $f_1 = 2h_1$ mit $f = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ gleichgesetzt werden, da sich an e (wie auch an $e_1 = a$) nichts ändern lässt. Das ergibt $h_1 = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{d}{4}$ und damit $h = \frac{d}{2}$, also die halbe Länge der Diagonalen des Quadrats ABCD, was für diesen Körper drei zueinander paarweise normale und gleich lange Hauptdiagonalen AC, BD und SS_1 bedeutet. Für diese bietet sich als Träger ein kartesisches Achsensystem Uxyz mit dem Symmetriezentrum U und den Achsen x = (AC), y = (BD) und z = (SS_1) an, worauf noch zurückzukommen sein wird. Grund-, Auf- und Kreuzriss auf die Bildebenen π_1 = (xy), π_2 = (yz) und π_3 = (xz) zeigen dann drei identische Bilder.

In der linken Zeichnung, in der nur die sichtbaren Ecken beschriftet sind, müsste dazu allerdings der Grundriss um 45° nach rechts gedreht werden, während in der bei ihr zugrundeliegenden Aufstellung des Körpers der Rhombus $A''E''B''E_1''$ die wahre Gestalt aller zwölf Flächen mit der Seitenlänge s und dem Flächeninhalt $A = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{e_1 \cdot f_1}{2}$ anzeigt, woraus sich auch die Gesamtoberfläche des Körpers mit O = 12A wie folgt ergibt:

$$s = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{6} \qquad A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{2} \qquad O = 3a^2 \cdot \sqrt{2}$$

Aus der Zeichnung ist auch erkennbar, dass es sich bei dem Körper mit den Ecken $EFGHE_1F_1G_1H_1$ um einen Würfel mit der Kantenlänge $\frac{d}{2} = 2h_1$ handelt, der dem Gesamtkörper eingeschrieben ist, was weitreichende Folgen hat:

Denn wenn man den sechs Begrenzungsflächen dieses Würfels quadratische Pyramiden mit der Höhe $h_1 = \frac{d}{4}$ aufsetzt, dann erhält man genau das hier diskutierte Objekt. Sein Volumen V ist doppelt so groß wie das Volumen V_W des eingeschriebenen Würfels, weil sich dieser aus sechs zu den aufgesetzen Pyramiden kongruenten Pyramiden mit dem Symmetriezentrum als Spitze zusammensetzt.

$$\boxed{V_W = \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{4} \Rightarrow V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{2}}$$

Die abschließende Zeichnung veranschaulicht den ganzen geschilderten Sachverhalt anhand eines Aufrisses auf die Bildebene $\pi_2 = (yz)$, bei dem nur die sichtbaren Ecken beschriftet sind, und eines aus diesem „herausgezogenen“ Frontalrisses. Als letzte Überraschung mag gelten, dass das von zwölf gleich großen Rhomben begrenzte Dodekaeder eine Inkugel mit dem Radius $r_i = \frac{a}{2}$ besitzt, weil die Halbierungspunkte der zwölf Würfelkanten alle vom Mittelpunkt U gleich weit entfernt sind und die entsprechenden Verbindungsstrecken auf die zugehörigen Rhombenflächen normal stehen. Im Aufriss ist der zweite Umrisskreis u_2 eingezeichnet und eine Darstellung in normaler Axonometrie würde auch die Darstellung der Inkugel (bzw. ihres zugehörigen Umrisskreises) in einem anschaulichen Riss ermöglichen.