Einführung in die Differentialrechnung

Von Dieter Grillmayer

Diese kleine Arbeit basiert auf ein paar Stunden Lernhilfe für eine Enkelin, die das erste Semester der 7. Klasse an „ihrem" Linzer Gymnasium wegen eines Amerika-Aufenthalts versäumt hatte. An der von ihr besuchten High School in den USA stand die Differentialrechnung nicht auf dem Lehrplan, sodass eine kompakte Einführung in diese Materie erforderlich war. Das – allerdings mathematisch sehr begabte – Mädchen hat schon nach zwei „Sitzungen" wieder Anschluss an ihre Klasse gefunden, was mich wirklich überrascht und dazu animiert hat, den von mir gewählten Zugang zum genannten Thema schriftlich festzuhalten.

1. Grundbegriffe

Funktion: Eindeutige Zuordnung von Elementen x aus einer Menge X auf Elemente y aus einer Menge Y. Im Weiteren erfolgt hinsichtlich der Elemente eine Einschränkung auf reelle Zahlen (= Menge R), also $X \subseteq R$ und $Y \subseteq R$.

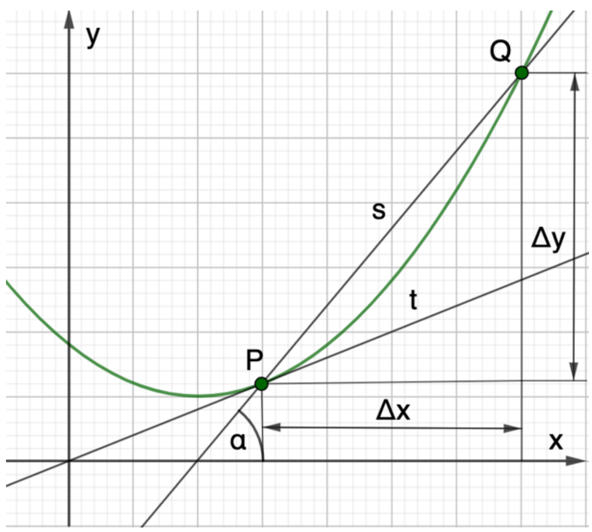
Funktionsgleichung: Gleichung der Gestalt y = f(x), welche die Zuordnung vermittelt. (x ist ihre unabhängige Variable, auch „Stelle" genannt, der Funktionswert y die abhängige Variable.) Der Funktionsterm f(x) definiert die Art der Funktion und die größtmögliche Menge X.

Funktionsarten: Ist $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $i \in N$ (= Menge der natürlichen Zahlen) ein Polynom, so handelt es sich um eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) mit X = R und es gibt zu jedem $x \in R$ genau ein $y \in R$. Weitere algebraische Funktionen sind die rational gebrochenen Funktionen mit $X = R\backslash\{\text{Nullstellen des Nenners}\}$ und die Wurzelfunktionen mit $X = R\backslash\{\text{negative Radikanden}\}$. Zu den als transzendent bezeichneten Funktionen gehören z. B. die Winkel- und die Exponentialfunktionen; auf sie wird in dieser Einführung nicht weiter Bezug genommen.

Funktionsgraph und Funktionskurve: Menge aller Punkte, deren Koordinaten zugeordnete Werte sind, also $P(x_1|y_1) \Leftrightarrow y_1 = f(x_1)$. Für X = R oder $X = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$ ist der Graph eine Kurve.

Differenzen- und Differentialquotient:

Sind $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ zwei Kurvenpunkte, dann ist deren Verbindungsgerade s = (PQ) eine Kurvensehne mit der Steigung $k_s = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dieser Wert wird auch als Differenzenquotient bezeichnet. Wandert Q auf der Kurve nach P, so wird aus der Sehne s die Kurventangente t im Punkt P und die zugehörigen Differenzenquotienten bilden eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert $\frac{dy}{dx}$. Dieser Wert wird als Differentialquotient bezeichnet und gibt die Steigung k_t der Tangente t an.



Der Differenzenquotient $k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$ wird auch als mittlere Änderungsrate, der Differentialquotient $k_t = \frac{dy}{dx} = \tan\varphi$ als lokale Änderungsrate der Funktion bezeichnet.

Erste und zweite Ableitungsfunktion: Im Zentrum der weiteren Behandlung des Themas steht die Tatsache, dass aus y = f(x) eine Gleichung y' = f'(x) abgeleitet werden kann, welche jeder Variablen x den zugehörigen Differentialquotienten zuordnet, also hinsichtlich der Funktionskurve von y = f(x) zu jedem Punkt P(x/y) die Steigung der zugehörigen Kurventangente angibt. Der entsprechende Rechenvorgang wird als Differenzieren oder als Ableiten und die Funktion f'(x) als erste Ableitungsfunktion bezeichnet. Differenzieren der Funktion f'(x) führt zu einer zweiten Ableitungsfunktion mit der Gleichung y'' = f''(x). Von ihr kann das Krümmungsverhalten der Ausgangskurve abgelesen werden. Für y'' > 0 liegt eine Linkskrümmung („Linkskurve“ für wachsende x) und für y'' < 0 eine Rechtskrümmung („Rechtskurve“ für wachsende x) vor, an Stellen mit y'' = 0 ändert sich das Krümmungsverhalten. Die Veranschaulichung dazu erfolgt anhand der Beispiele in Abschnitt 3.

2. Ableitungsregeln

Zu unterscheiden sind allgemeine Regeln (A), die für jeden Funktionsterm f(x) gelten, und besondere Regeln (B), die sich auf die Funktionsart beziehen.

Die Summenregel (A1) kann als wichtigste A-Regel gelten und lautet: Besteht f(x) aus einer Summe (Differenz) von Gliedern, so wird jedes Glied für sich differenziert:

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \Longrightarrow f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)}$$

Die Absolutglied-Regel (A2) lautet, dass Absolutglieder beim Differenzieren „verschwinden“:

$$\boxed{f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0 \text{ für alle } a \in R}$$

Die Faktor-Regel (A3) lautet, dass ein konstanter Faktor erhalten bleibt:

$$\boxed{f(x) = a \cdot g(x) \Longrightarrow f'(x) = a \cdot g'(x) \text{ für alle } a \in R}$$

Die Potenzregel (B1) kann als wichtigste B-Regel gelten und lautet:

$$\boxed{f(x) = x^r \Longrightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1} \text{ für alle } r \in R}$$

Mit Hilfe dieser vier Regeln lassen sich alle Polynome differenzieren, siehe Abschnitt 3. Folgende weitere A-Regeln und ihre Überprüfung („Probe“) mit Hilfe der Regel B1 ermöglichen erste konkrete Berechnungen. Das soll anhand der Produktregel (A4)

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

wie folgt demonstriert werden: $y = x^5 \Longrightarrow y' = 5x^4$ nach Regel B1. Oder: $y = x^3 \cdot x^2$, was nach Regel A4 und B1 $y' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4$ und damit ebenfalls $y' = 5x^4$ ergibt.

Die Quotientenregel (A5) ist hinsichtlich der Ableitung von rational gebrochenen Funktionen unerlässlich und lautet:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow y' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Probe: $y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x$ oder $y = \frac{x^4}{x^2} \Longrightarrow y' = \frac{4x^3\cdot x^2 - x^4\cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5}{x^4} = \frac{2x^5}{x^4} = 2x$

Die Kettenregel (A6) dient der Ableitung einer Verkettung von zwei (oder auch mehreren) Funktionen; im entsprechenden Funktionsterm wird eine „innere" Rechenoperation von einer „äußeren" überlagert, wie das z. B. beim Wurzeltermen f(x) der Fall ist, bei denen der Radikand ein Term g(x) ist. Die Regel A6 besagt, dass hinsichtlich der äußeren Operation der Term g(x) als Variable aufgefasst, entsprechend differenziert und dieses Ergebnis dann noch mit der „inneren" Ableitung g'(x) multipliziert wird.

$$y = f(g(x)) \Longrightarrow y' = f'(g)\cdot g'(x)$$

Probe: $y = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \Longrightarrow y' = 4x^3 - 4x$ oder nach Kettenregel

$$y' = 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x = 4x^3 - 4x$$

Die Regeln A1 bis A6 sowie Regel B1 sind ausreichend, um damit alle algebraischen Funktionen differenzieren zu können. Zum Beispiel folgt aus $y = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ die erste Ableitung $y' = \frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Polynomfunktionen

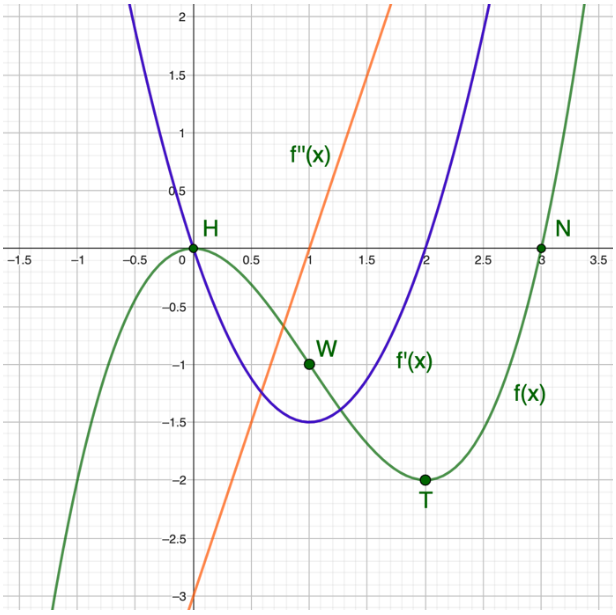
Ist f(x) ein Polynom n-ten Grades, so ist die zugehörige Funktionskurve eine Parabel n-ter Ordnung; aufgrund der Regel B1 ist die erste Ableitung f'(x) ein Polynom vom Grad n – 1 und die zweite Ableitung f''(x) ist ein Polynom vom Grad n – 2. Nach den Regeln der Algebra hat f(x) = 0 maximal n reelle Lösungen („Nullstellen") sowie f'(x) = 0 maximal n – 1 reelle Lösungen und f''(x) maximal n – 2 reelle Lösungen. Jede Nullstelle von f'(x) weist auf eine waagrechte Tangente (k = 0) der Funktionskurve von f(x) hin, was für diese Parabel, ausgenommen y'' = 0, einen Scheitelpunkt, und zwar einen Hochpunkt H für y'' < 0 (Rechtskrümmung) oder einen Tiefpunkt T für y'' > 0 (Linkskrümmung) bedeutet. Eine Parabel n-ter Ordnung hat also maximal n – 1 Scheitel. Jede Nullstelle von f''(x) weist zufolge der Änderung des Krümmungsverhaltens auf einen Wendepunkt hin; eine Parabel n-ter Ordnung hat also maximal n – 2 Wendepunkte, davon für y' = 0 solche mit waagrechter Wendetangente.

In den folgenden drei Beispielen wird alles bisher Gesagte anhand von konkreten Polynom-funktionen angewendet und durch Zeichnungen veranschaulicht. Rein zeichentechnisch bin ich mit dem Geo-Gebra-Programm schon seit ein paar Jahren hinreichend vertraut, z. B. ist die erste Figur in dieser Arbeit, welche die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient erläutert, mit diesem Programm hergestellt worden. Für die Darstellung von Funktionskurven habe ich es bislang allerdings noch nie verwendet und hat mich das Ergebnis nun wirklich sehr überrascht und beeindruckt. Das war auch ein wesentliches Motiv dafür, diese „Einführung in die Differentialrechnung" für eine allfällige Weitergabe aufzubereiten und wird das Thema mit diesen Beispielen auch abgeschlossen.

<u>Beispiel 1:</u> y = $\frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 \Rightarrow$ y' = $\frac{3}{2} \cdot x^2 - 3x \Rightarrow$ y'' = 3x −3

Die grüne Parabel dritter Ordnung hat zwei Scheitel H(0/0) und T (2/-2), was sich aus den Nullstellen 0 und 2 der 1. Ableitung ergibt: $\frac{3}{2} \cdot x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = x \cdot (x-2) = 0$. Und sie hat einen Wendepunkt W(1/-1), was sich aus der Nullstelle 1 der 2. Ableitung ergibt: $3x - 3 = 3 \cdot (x-1) = 0$.

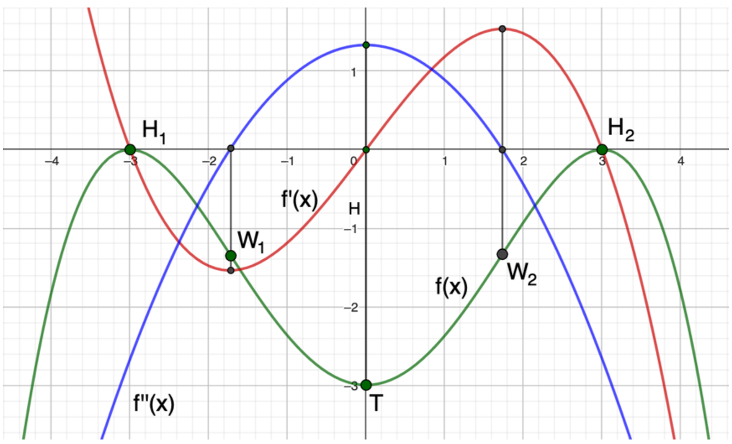
Ihre Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich aus der Gleichung $\frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 = 0$, die sich zu $x^2 \cdot (x-3) = 0$ umformen lässt. Die Doppelnullstelle $x_{12} = 0$ weist auf den Berührpunkt H(0/0) hin, und $x_3 = 3$ auf den Schnittpunkt N(3/0). Letztlich wäre noch festzuhalten, dass die grüne Kurve zentrisch symmetrisch mit den Zentrum W ist.



Die blaue Parabel zweiter Ordnung (= Kegelschnittlinie) belegt sehr schön die negative Steigung (= das Fallen) der grünen Kurve zwischen 0 und 2, weil für k = tanφ < 0 der Winkel φ > 90°ist und die Tangente daher von links oben nach rechts unten verläuft, sowie ihre positive Steigung (= ihren Anstieg) für x < 0 und x > 2. Ihren Scheitel hat die blaue Kurve klarerweise auf der Ordinate x = 1 durch die Nullstelle der 2. Ableitung, auf der auch der Wendepunkt liegt.

Die gelbe Gerade belegt sehr schön die negative Krümmung (= „Rechtskurve") der grünen Linie für x < 1 und ihre positive Krümmung (= „Linkskurve") für x > 1. Auch dass für Hochpunkte immer y'' < 0 und für Tiefpunkte immer y'' > 0 gilt erklärt sich aus dem Krümmungsverhalten der Funktionskurve in diesen Punkten.

<u>Beispiel 2:</u> $y = -\frac{x^4}{27} + \frac{2x^2}{3} - 3 \Rightarrow y' = -\frac{4x^3}{27} + \frac{4x}{3} \Rightarrow y'' = -\frac{4x^2}{9} + \frac{4}{3}$

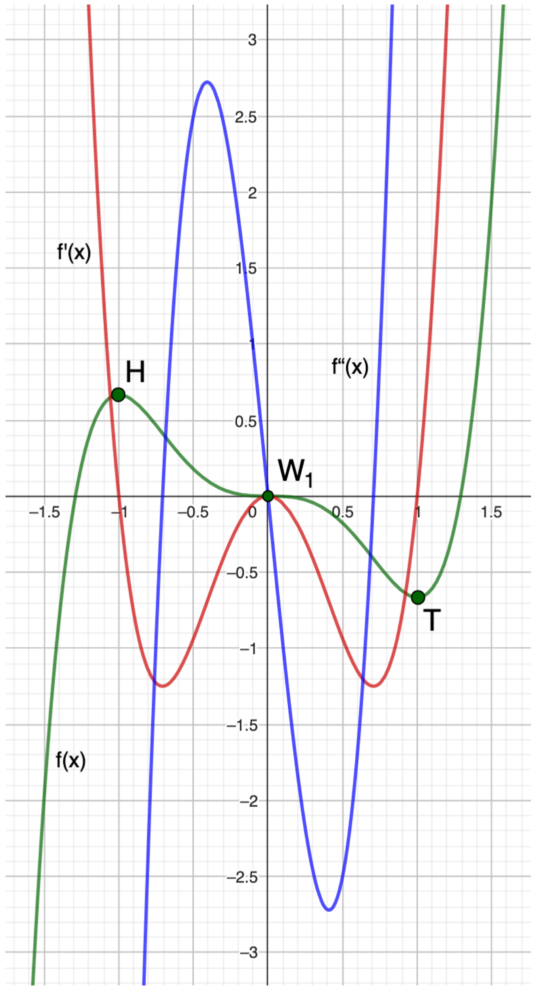


Es handelt sich um eine biquadratische Polynomfunktion vierten Grades, d. h. im Polynom treten nur gerade Potenzen von x auf. Die zugehörige Funktionskurve (grün) ist in diesem Fall stets eine zur y-Achse symmetrische Parabel vierter Ordnung, im vorliegenden Beispiel mit drei Scheiteln H_1(-3/0), T(0/-3), H_2(3/0) und zwei Wendepunkten $W_1\left(-\sqrt{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$ und $W_2\left(\sqrt{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$.

Die Rechnungen dazu sind wohl schon Routine. Wie bereits anhand von Beispiel 1 festgestellt bestätigt die (rote) Funktionskurve der 1. Ableitungsfunktion das Steigungsverhalten und die (blaue) Funktionskurve der 2. Ableitungsfunktion das Krümmungsverhalten der grünen Kurve.

<u>Beispiel 3:</u> $y = x^5 - \frac{5}{3} \cdot x^3 \Longrightarrow y' = 5x^4 - 5x^2 \Longrightarrow y'' = 20x^3 - 10x$

f(x) hat wegen $x^5 - \frac{5}{3} \cdot x^3 = x^3 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{3}\right) = 0$ die Dreifach-Nullstelle 0, was bereits auf einen Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente an dieser Stelle hinweist, sowie zwei weitere Nullstellen bei $\pm\frac{\sqrt{15}}{3} \approx 1{,}29$. f'(x) hat wegen $5x^4 - 5x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0$ die Doppel-Nullstelle 0 sowie die Nullstellen ± 1. f''(x) hat wegen $10x \cdot (2x^2 - 1) = 0$ die Nullstellen 0 und $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$. Daraus folgen hinsichtlich der grünen Funktionskurve der Hochpunkt $H\left(-1\middle|\frac{2}{3}\right)$, der Tiefpunkt $T\left(1\middle|-\frac{2}{3}\right)$ und der Wendepunkt $W_1(0|0)$. Ihre Wendepunkte W_2 und W_3 liegen, ebenso wie die zwei Tiefpunkte der roten Kurve, auf den Ordinaten x = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Die rote Kurve belegt auch das Steigen der grünen Kurve bis zum Hochpunkt und ab dem Tiefpunkt sowie das Fallen dazwischen. Die blaue Kurve belegt das Krümmungsverhalten der grünen Kurve.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass der zur höchsten Potenz eines Polynomterms gehörige Koeffizient a_n darüber Auskunft gibt, woher die zugehörige Parabel kommt und wohin sie geht:

Ist diese höchste Potenz ungerade, so kommt die Kurve für $a_n > 0$ von links unten und geht nach rechts oben (grüne Kurve in Beispiel 1 und Beispiel 3), und für $a_n < 0$ ist es umgekehrt (rote Kurve in Beispiel 2). Ist die höchste Potenz gerade, so kommt sie für $a_n > 0$ von links oben und geht nach rechts oben, siehe die rote Parabel vierter Ordnung in Beispiel 3, und für $a_n < 0$ kommt sie von links unten und geht sie nach rechts unten (grüne Kurve in Beispiel 2). Grund dafür ist die zunehmende Dominanz der höchsten Potenz von x in der Funktionsgleichung hinsichtlich der y-Werte, je weiter die Stellen nach links bzw. nach rechts rücken.