# Die CASSINIschen Linien

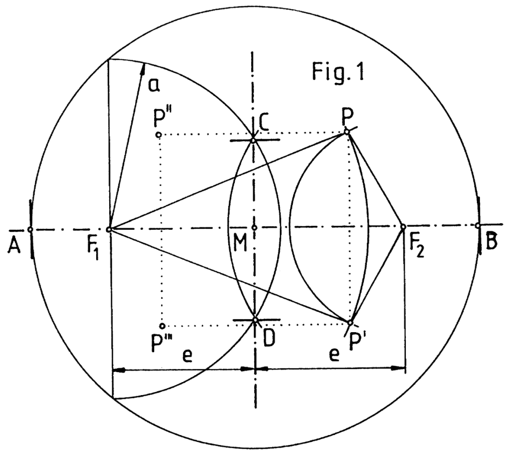
Nach einem Konzept von OStR. Mag. Kurt KUNZE

Gegeben seien zwei im Abstand 2e voneinander entfernte feste Punkte $F_1$ und $F_2$ sowie eine Streckenlänge 2a. Dann liegen (für $a > e$) alle Punkte P, deren **Abstandssumme** $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ gleich 2a ist, auf einer **Ellipse**, und (für $a < e$) liegen alle Punkte P, deren **Abstandsdifferenz** $|\,\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\,|$ gleich 2a ist, auf einer **Hyperbel**. $F_1$ und $F_2$ werden als Brennpunkte dieser, zusammen mit der Parabel seit dem Altertum als Kegelschnitte bekannten, Kurven bezeichnet.

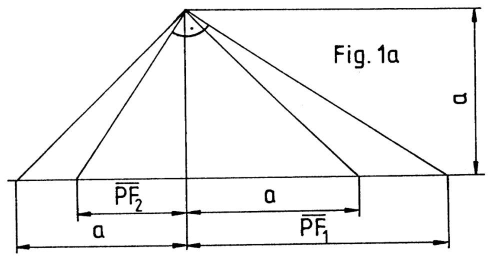
Der französische Astronom Giovanni Domenico CASSINI (1625 bis 1712) hat eine Theorie aufgestellt, nach der sich die Sonne (!) auf einer Kurve bewegt, für deren Punkte P das **Produkt der Abstände** von zwei festen Punkten $F_1$ und $F_2$ konstant ist. Wenngleich sich diese Theorie als falsch erwies, hat CASSINI damit die nach ihm benannten Linien „erfunden“.

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = a^2$$

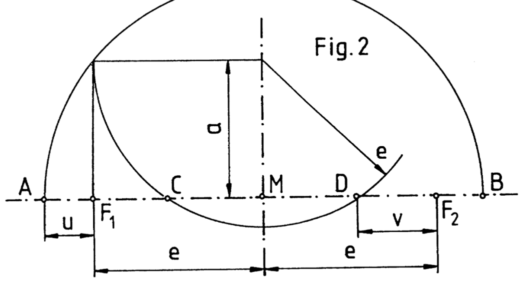
Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass jede CASSINIsche Linie zwei aufeinander normal stehende Symmetrieachsen und in deren Schnittpunkt M ein Symmetriezentrum hat (Fig.1). Es ist naheliegend, die Trägergerade der Brennpunkte als **Hauptachse** und die andere Symmetrale als **Nebenachse** zu bezeichnen.




Die Form einer CASSINIschen Linie wird offenbar durch die beiden Parameter a und e bestimmt, und eine Konstruktion einzelner Kurvenpunkte ist mit dem Zirkel möglich, wenn die beiden Abstände $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ unter Benützung des Höhensatzes ermittelt werden (Fig. 1, 1a).




Für $a > e$ ergibt die Bedingung $\overline{PF_1} = \overline{PF_2}$ zwei auf der Nebenachse liegende (reelle) Kurvenpunkte C und D, deren Tangenten aus Symmetriegründen zur Hauptachse parallel sein müssen (Fig. 1). In Analogie zur Ellipse sollen diese Punkte als **Nebenscheitel** bezeichnet werden. Für $a = e$ fallen C und D mit M zusammen, für $a < e$ treten keine (reellen) Nebenscheitel auf.




Für Kurvenpunkte, die auf der Hauptachse liegen, muss offenbar eine der beiden Bedingungen $(2e + u)\cdot u = a^2$ oder $(2e - v)\cdot v = a^2$ mit $u > 0$ und $0 < v < e$ gelten (Fig. 2). Durch Auflösen der quadratischen Gleichungen ergibt sich unter den genannten Einschränkungen

$$u = \sqrt{e^2 + a^2} - e \quad \text{und} \quad v = e - \sqrt{e^2 - a^2}$$

Aus der u-Bedingung folgt, dass jede CASSINIsche Linie zwei **Hauptscheitel** A und B (mit zur Hauptachse normalen Tangenten) hat, die von M den Abstand $\sqrt{e^2 + a^2}$ haben (Fig. 1, 2). Die v-Bedingung liefert nur für $e \geq a$ einen reellen Wert. In diesem Fall gibt es also zwei weitere Kurvenpunkte C, D auf der Hauptachse, die von M den Abstand $\sqrt{e^2 - a^2}$ haben (Fig. 2). Für e = a fallen diese Punkte mit M zusammen.

Wenden wir uns nun der Koordinatengeometrie zu: Sei M der Koordinatenursprung, die Hauptachse die x-Achse und die Nebenachse die y-Achse, so gilt für die beiden Brennpunkte $F_1(-e/0)$ und $F_2(e/0)$. Nach der Distanzformel gilt dann für die Koordinaten jedes Kurvenpunktes P(x/y) die Gleichung

$$\boxed{\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2}$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung und weitere Umformungen ergibt sich schließlich

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 - 2e^2 \cdot (x^2 - y^2) = a^4 - e^4}$$

Diese Kurvengleichung vierten Grades zeigt, dass es sich bei den CASSINIschen Linien um **algebraische Kurven vierter Ordnung** handelt. Die Berechnung der Schnittpunkte mit einer Geraden g führt bei solchen Kurven auf eine Polynomgleichung vierten Grades in x oder y, und diese hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau vier Lösungen im Sinne der algebraischen Wurzelzählung, wobei komplexe Lösungen immer paarweise auftreten. Daher haben algebraische Kurven vierter Ordnung mit einer Geraden g stets 0, 2 oder 4 reelle Schnittpunkte, wobei ein Berührpunkt für (mindestens) zwei Schnittpunkte zählt.

Das gilt insbesondere für alle zur x-Achse parallelen Geraden g mit der Gleichung y = c, und die Berührpunkte dieser Geraden mit der Kurve sind deren Hoch- und Tiefpunkte (Fig. 3). Wir können diese Punkte berechnen, indem wir in der obigen Gleichung das y durch ein c ersetzen und die biquadratische Gleichung nach x auflösen:

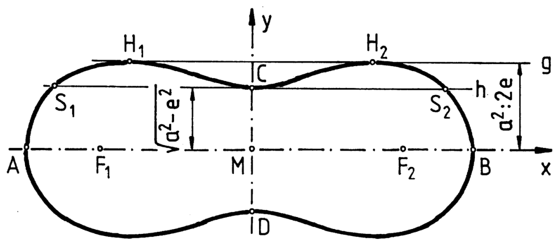


Fig. 3

$$\boxed{x_{1234} = \pm\sqrt{(e^2 - c^2) \pm \sqrt{a^4 - 4e^2c^2}}}$$

Soll nun g eine „Doppeltangente“ sein, also die Kurve in zwei (reellen) Punkten berühren, dann muss der Radikand der „inneren“ Wurzel verschwinden und außerdem $e^2 - c^2 \geq 0$ sein. Diesen Sachverhalt beschreibt die Ungleichung

$$\boxed{e^2 - a^4 : 4e^2 \geq 0 \Rightarrow a \leq e \cdot \sqrt{2}}$$

Die CASSINIschen Linien haben also genau dann zwei Hochpunkte $H_1$, $H_2$, (und zwei dazu bezüglich der Hauptachse symmetrische Tiefpunkte $T_1$, $T_2$), wenn a kleiner als $e \cdot \sqrt{2}$ ist. Für $a = e \cdot \sqrt{2}$ fallen diese Punkte in den Nebenscheitel C, der in diesem Fall als vierfacher Schnittpunkt („Flachpunkt“) der Kurve mit der Tangente g zu betrachten ist.

Das Ergebnis wird für Kurven mit Nebenscheiteln C, D auch durch folgende Kontrollrechnung bestätigt: Die Kurve hat im Punkt C(0/y) die Tangente h mit der Gleichung $y = \sqrt{a^2 - e^2}$ (Fig.

3). Tatsächlich ergibt sich der x-Wert 0, wenn in obigem Lösungsterm von $x_{1234}$ das $c^2$ durch $a^2 - e^2$ ersetzt wird, und zwar für den Pluswert der „inneren" Wurzel. Für den Minuswert dieser Wurzel wird der Radikand der „äußeren" Wurzel nur dann positiv, wenn $a < e \cdot \sqrt{2}$ ist, was auf zwei reelle Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ von h mit der Kurve hindeutet. Diese gibt es genau dann, wenn die Hochpunkte $H_1$ und $H_2$ auftreten und die Kurve eine „Biskottenform" hat. Für $a \geq e \cdot \sqrt{2}$ ist C der höchste Punkt der Kurve, die dann eine ovale Form hat.

**Zusammenfassung:**

**Die Form einer CASSINIschen Linie hängt in folgender Weise vom Verhältnis $\lambda = a : e$ der beiden Parameter ab:**
**1. Für $\lambda \geq \sqrt{2}$ entsteht eine ovale Form mit zwei Haupt- und zwei Nebenscheiteln (Fig. 4).**
**2. Für $\sqrt{2} > \lambda > 1$ entsteht die „Biskottenform" (Fig. 1 und 3), wobei mit abnehmendem $\lambda$ die Einschnürung zunimmt, d.h. die Nebenscheitel C und D immer näher zusammenrücken.**
**3. Für $\lambda = 1$ fallen C und D mit M zusammen, es entsteht eine Achterschleife (Fig. 6).**
**4. Für $1 > \lambda > 0$ wird die Kurve „zweiteilig", wobei mit abnehmendem $\lambda$ die Punkte C und D nunmehr auf der Hauptachse auseinanderrücken (Fig. 2 und 5).**
**5. Für $\lambda = 0$ reduziert sich die Kurve auf die beiden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$.**

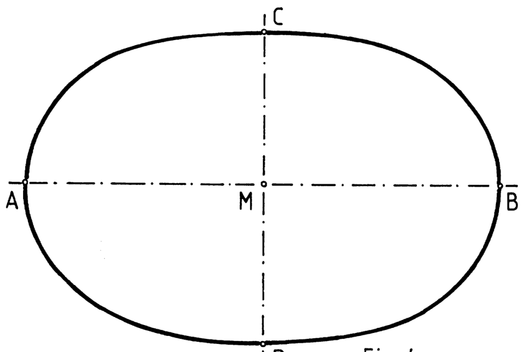


Fig. 4

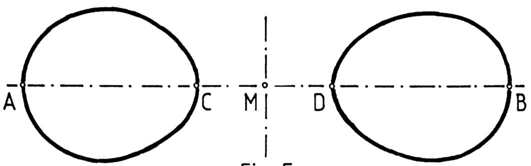


Fig. 5

Ein in die Geheimnisse der Darstellenden Geometrie eingeweihter Leser wird beim Betrachten der Figuren 3 bis 6 wohl sofort an die **achsenparallelen ebenen Schnitte des Ringtorus** denken, welche schon von den alten Griechen untersucht worden sind und in der Fachliteratur **spirische Linien** genannt werden. („Spira" ist die griechische Bezeichnung für den Torus.) Die Form einer spirischen Linie ist von drei Parametern abhängig, nämlich vom Mittenkreisradius r und vom Meridiankreisradius $\rho$ des Torus sowie vom Abstand d, den die Schnittebene $\varepsilon$ von der Torusachse hat. Bei den CASSINIschen Linien treten hingegen nur zwei Parameter, nämlich a und e, auf. Es kann sich bei ihnen also höchstens um Sonderfälle von spirischen Linien handeln, und so ist es auch, wie im „LORIA" nachzulesen ist.*) Der dort angegebene und bewiesene Satz lautet wie folgt:

**Spirische Linien sind dann CASSINIsche Linien, wenn der Abstand d der Schnittebene $\varepsilon$ von der Torusachse mit dem Meridiankreisradius $\rho$ des Torus übereinstimmt. Der Parameter e einer so erzeugten CASSINIschen Linie stimmt mit dem Mittenkreisradius r des Torus überein.**

*) Gino LORIA, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Druck und Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910. Der erste Band dieses „klassischen" und auch antiquarisch kaum noch erhältlichen Standardwerkes der höheren Geometrie gehört zum Bestand

der neu eingerichteten „historischen Bibliothek“ des BRG Steyr. In einem anderen Standardwerk, dem Lehrbuch der Darstellenden Geometrie von MÜLLER-KRUPPA (Springer-Verlag Wien, 1948) haben die Autoren im Zuge dieser Arbeit einen kleinen Fehler entdeckt, indem dort nämlich alle achsenparallelen ebenen Schnitte des Ringtorus als CASSINIsche Linien angesprochen werden.

## Die BERNOULLIsche Lemniskate

Eine CASSINIsche Linie mit a = e hat die Form einer Achterschleife (Fig. 6) und die Kurvengleichung vereinfacht sich auf

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 - 2e^2 \cdot (x^2 - y^2) = 0}$$

Diese üblicherweise im Mathematikunterricht untersuchte Kurve wird BERNOULLIsche Lemniskate genannt. Sie hat in M einen Doppelpunkt (M = C = D) mit aufeinander normal stehenden Tangenten.

Als spirische Linien treten Achterschleifen (= Lemniskaten) nur beim Ringtorus auf, und zwar dann, wenn die Schnittebene ε den Torus in einem Punkt seines Kehlkreises berührt. Nach dem allgemeinen Satz über CASSINIsche Linien als Sonderfälle von spirischen Linien können BERNOULLIsche Lemniskaten also nur auf einem Torus auftreten, bei dem der Kehlkreisradius d mit dem Meridiankreisradius ρ übereinstimmt, was wiederum r = 2ρ = e zur Folge hat (Fig. 6).

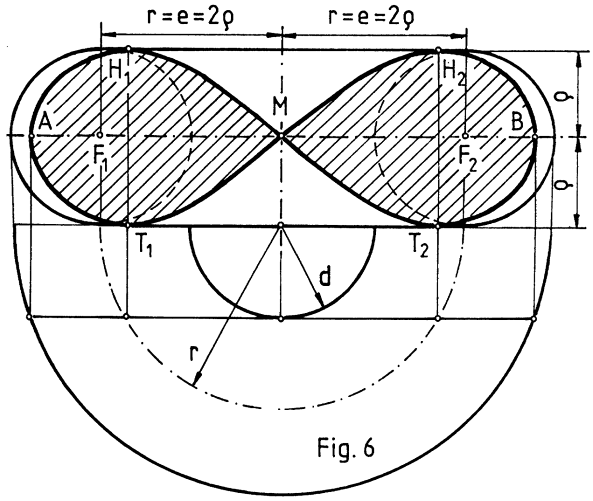


Fig. 6

Text: Dieter Grillmayer
Zeichnungen: Wilhelm Nowak