Das Wurstradlproblem

Von Dieter Grillmayer

Wenn ein kreisförmiges „Wurstradl“ durch einen geradlinigen Schnitt g in zwei Hälften geteilt werden soll, dann muss g durch den Kreismittelpunkt M gelegt werden und es ergeben sich immer zwei halbkreisförmige kongruente Teilstücke, gleichgültig, wie man diesen Schnitt führt (Fig. 1).

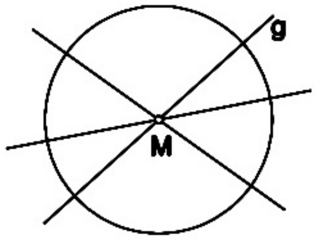


Fig. 1

Nicht mehr deckungsgleich sind hingegen die beiden Stücke, die wir erhalten, wenn wir das halbe „Wurstradl“ nochmals halbieren, also durch einen geradlinigen Schnitt g in zwei flächengleiche Teile zerlegen, es sei denn, g ist die Symmetrale des Halbkreises (Fig. 2).

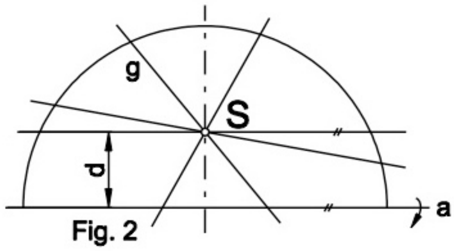


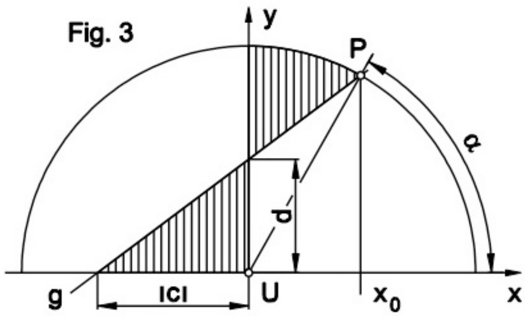
Fig. 2

Im Zuge der entsprechenden Tätigkeit (Teilen des halben „Wurstradls“) kam ich auf die Idee, den Gesetzmäßigkeiten nachzugehen, denen jede der halbierenden Geraden g unterliegt.

Meine erste Vermutung war, dass alle in Frage kommenden Teilungsgeraden durch den Schwerpunkt S des Halbkreises mit dem Radius r hindurchgehen, so wie es Fig. 2 fälschlicherweise zeigt.[1)] Die folgende **Grenzwertüberlegung** falsifiziert diese Vermutung nämlich umgehend und deutet auch an, dass die gestellte Aufgabe wesentlich kniffliger ist als ich ursprünglich angenommen hatte.

Die Überlegung lautet wie folgt: Alle Geraden g (Abschnittsform $x/c + y/d = 1$) mit $c \geq -r$ und der nämlichen Eigenschaft müssen den Halbkreis so schneiden, dass die beiden in Fig. 3 schraffierten Teilstücke flächengleich sind. Denn derselbe Flächeninhalt, der dem linken Viertelkreis durch den Schnitt weggenommen wird, muss vom rechten Viertelkreis dazukommen.

Fig. 3



Die Anschauung zeigt, dass das nur der Fall sein kann, wenn d kleiner als r/2 ist. Für $c \to 0$ stimmen die beiden Flächenstücke auch der Form nach immer mehr überein, also muss d bei dieser Aktion von unten her dem Wert r/2 zustreben, **kann also jedenfalls nicht konstant sein**. Am Ende des Aufsatzes wird das auch rechnerisch nachgewiesen.

Den folgenden Berechnungen liegen die obere Hälfte des Einheitskreises ($r = 1$) und Gerade mit positiver Steigung, also $c < 0$ und $d > 0$ zugrunde. Das ist insofern keine unzulässige Einschränkung, als man durch zentrische Streckungen mit dem Streckzentrum U(0/0) sowie durch Geradenspiegelung an der y-Achse aus dieser Annahme alle weiteren Möglichkeiten ableiten kann.

Eine Beziehung zwischen c, d und den Koordinaten x_0, y_0 des Schnittpunkts P der Geraden g mit dem Einheitskreis ergibt sich durch Kombination der folgenden Bedingungen: (1) P liegt auf dem Kreis, (2) P liegt auf der Geraden g, (3) die zwei in Fig. 3 schraffierten Flächen haben den gleichen Inhalt.

(1) $x_0^2 + y_0^2 = 1$ Damit lässt sich zu jedem x_0 das zugehörige y_0 berechnen und umgekehrt.

(2) $x_0/c + y_0/d = 1 \;\Rightarrow\; y_0/d = 1 - x_0/c = (c - x_0) : c \;\Rightarrow\; d/y_0 = c : (c - x_0) \;\Rightarrow\; d = \dfrac{c \cdot y_0}{c - x_0}$

(3) $$\frac{-c\,d}{2} = \int_0^{x_0} \sqrt{1 - x^2}\,dx - d \cdot x_0 - \frac{1}{2} \cdot (y_0 - d) \cdot x_0$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals ist in diesem Aufsatz die größte Hürde. Die Berechnung der zur Funktionsgleichung des Kreises gehörigen Stammfunktion wird im Unterricht meistens unterdrückt, obwohl es sich um ein schönes Beispiel für die beiden gebräuchlichsten Integrationsmethoden (Substitution und Partielle Integration) handelt:

$$x = \cos\alpha,\; y = \sin\alpha,\; \frac{dx}{d\alpha} = -\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad dx = -\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \cdot (-\sin\alpha) \cdot d\alpha = -\int \sin^2\alpha\, d\alpha$$

$$\int \sin^2\alpha\, d\alpha = \int \sin\alpha \cdot \sin\alpha\, d\alpha = \sin\alpha \cdot (-\cos\alpha) - \int (-\cos\alpha) \cdot \cos\alpha\, d\alpha =$$

$$= -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \int \underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}\, d\alpha = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \int 1\, d\alpha - \int \sin^2\alpha\, d\alpha$$

$$2 \cdot \int \sin^2\alpha\, d\alpha = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\int \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}$$

Die Resubstitution führt zu der im Unterricht des Realgymnasiums üblicherweise auch nicht explizit behandelten Umkehrfunktion der Cosinusfunktion, welche also jedem Cosinuswert die zugehörige Bogenlänge am Einheitskreis zuordnet, was mittels Taschenrechner im RAD-Modus, entweder mit der $\cos^{-1}$-Taste oder mit der Tastenkombination INV/cos, leicht zu bewerkstelligen ist:

$$\sin\alpha = y,\; \cos\alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \arccos x$$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = -\int \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sin\alpha\cos\alpha - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot (y \cdot x - \arccos x)$$

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot (x_0\, y_0 - \arccos x_0) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (x_0\, y_0 - \arccos x_0)}$$

Nun kann die „Hauptrechnung“ fortgesetzt werden:

$$\frac{-c\,d}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (x_0\, y_0 - \arccos x_0) - d\,x_0 - \frac{1}{2} \cdot (y_0 - d) \cdot x_0 \quad /\cdot 2$$

$$-c\,d = \frac{\pi}{2} + \cancel{x_0 y_0} - \arccos x_0 - 2d\,x_0 - \cancel{x_0 y_0} + d\,x_0$$

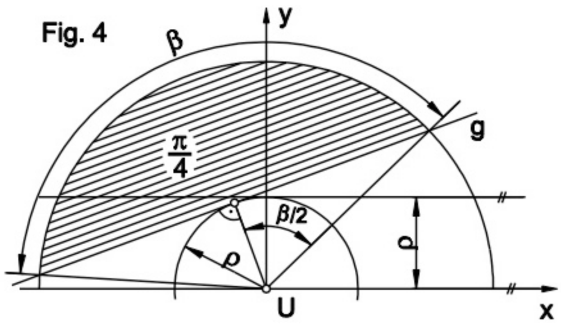
$$-c\,d = \frac{\pi}{2} - \arccos x_0 - d\,x_0 \Rightarrow -c\,d + d\,x_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos x_0$$

$$(4)\;\; d(x_0 - c) = \frac{\pi}{2} - \arccos x_0 \Rightarrow d = \frac{\pi - 2\arccos x_0}{2\cdot(x_0 - c)}$$

$$(2) = (4)\;\; \frac{c\cdot y_0}{c - x_0} = \frac{\pi - 2\arccos x_0}{-2\cdot(c - x_0)} \;\; /\cdot(c - x_0) \neq 0 \text{ für } c \neq 0$$

$$(5)\;\; \boxed{c = \frac{\arccos x_0 - \pi/2}{y_0}}$$

Mit Hilfe von Formel (5) kann man nun, von x_0 (oder y_0) ausgehend, das zugehörige c berechnen und zuletzt, am besten mit Formel (2), das zugehörige d. Aufgrund der in den Ansatz (3) eingehenden Voraussetzung, dass die Gerade g den begrenzenden Kreisdurchmesser schneidet (Fig. 3), gilt die Formel aber nur für $c \geq -1$.



Der andere Fall ($c \leq -1$) erweist sich, wie die Anschauung (Fig. 4) sofort zeigt, als der einfachere. In diesem Fall ist eine der beiden gleich großen Teilflächen nämlich immer ein komplettes Kreissegment mit dem Flächeninhalt $\pi/4$, und alle diese Kreissegmente werden von Geraden g abgeschnitten, die einen Kreis mit dem Mittelpunkt U und dem Radius ρ berühren.

Dieses ρ ist für Schnittgerade g mit der zur Debatte stehenden Eigenschaft offensichtlich der kleinste Wert, den der Parameter d annehmen kann. Die Schnittgerade ist in diesem Fall zum Begrenzungsdurchmesser des Halbkreises parallel. Im Folgenden wird ρ über den Zentriwinkel β berechnet, der zum Kreissegment mit dem Flächeninhalt $\pi/4$ gehört. ρ ist (nach Fig. 4) der Cosinus von $\beta/2$. Die Segmentfläche ist die Differenz aus Sektorfläche, bei der die Bogenlänge b wegen $r = 1$ mit dem Bogenmaß des Winkels β übereinstimmt, und der Fläche des gleichschenkligen Dreiecks mit der Schenkellänge 1, die nach der trigonometrischen Flächenformel daher die Hälfte von $\sin\beta$ beträgt. Daraus ergibt sich die Gleichung (6), deren Auflösung nur näherungsweise möglich ist und hier mit Hilfe des NEWTON'schen Verfahrens erfolgt:

$$A_{Seg.} = \frac{r\cdot b}{2} - \frac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2} = \frac{1\cdot\beta}{2} - \frac{1\cdot 1\cdot\sin\beta}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\sin\beta}{2} = \frac{\pi}{4} \;\; /\cdot 4$$

$$(6)\;\; 2\beta - 2\sin\beta - \pi = 0$$

$$y = 2\beta - 2\sin\beta - \pi \Rightarrow y' = 2 - 2\cos\beta$$

$$\beta_1 = 2{,}3 \Rightarrow \beta_2 = 2{,}3 - \frac{4{,}6 - 2\sin 2{,}3 - \pi}{2 - 2\cos 2{,}3} \approx 2{,}3099032$$

$$\Rightarrow \beta_3 = \beta_2 - \frac{2\beta_2 - 2\sin\beta_2 - \pi}{2 - 2\cos\beta_2} \approx 2{,}3098815$$

$$\rho = \cos\frac{\beta}{2} \approx \cos\frac{\beta_3}{2} \approx \underline{\underline{0{,}4039727}}$$

Zur Kontrolle wird nun die konkrete Rechnung anhand des Falles c = -1 (Fig. 5) durchgeführt, für den die Formel (5) ebenso gilt wie die Tangenteneigenschaft der Schnittgeraden g. Zunächst wird die Koordinate x_1 des Berührpunkts T nach der Polarenregel – Pol ist dabei A(-1/0) – ermittelt, woraus sich y_1 ergibt und in Folge die Tangentengleichung erstellt werden kann.

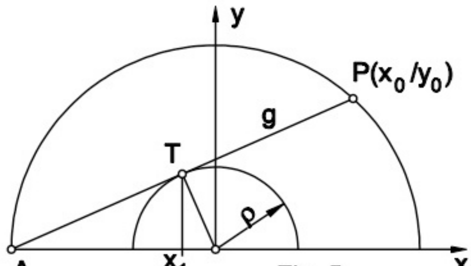


Fig. 5

Mit ihrer Hilfe werden dann die Koordinaten des Schnittpunktes $P(x_0/y_0)$ berechnet. Zuletzt erfolgt die Überprüfung des Ergebnisses mit Hilfe von Formel (5). Die Übereinstimmung zeigt die große Genauigkeit des nach NEWTON berechneten Wertes für ρ.

$$x x_1 + y y_1 = \rho^2 \wedge A(-1/0) \Rightarrow x_1 = -\rho^2$$
$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho^4 + y_1^2 = \rho^2 \Rightarrow y_1 = \sqrt{\rho^2 - \rho^4}$$
$$x x_1 + y y_1 = \rho^2 \wedge T(x_1/y_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x\rho^2 + y\rho\sqrt{1-\rho^2} = \rho^2 \;/:\rho^2$$
$$\Rightarrow \underline{-x + y\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} = 1}$$

Der Koeffizientenvergleich mit x/c + y/d = 1 ergibt $d = \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \approx 0{,}4416107$

<u>Punkt $P(x_0/y_0)$:</u>

$$\rho x - \sqrt{1-\rho^2}\cdot y + \rho = 0 \wedge y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \rho x + x = \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-x^2} \quad /^{\cdot 2}$$
$$\Rightarrow \cancel{\rho^2 x^2} + 2\rho^2 x^2 + \rho^2 = 1 - x^2 - \rho^2 + \cancel{\rho^2 x^2} \Rightarrow x^2 + 2\rho^2 x + 2\rho^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = -\rho^2 \pm \sqrt{\rho^4 - 2\rho^2 + 1} = \rho^2 \pm (\rho^2 - 1) \Rightarrow x_0 = 1 - 2\rho^2 \approx 0{,}6736121$$
$$\Rightarrow y_0 = 2\rho\sqrt{1-\rho^2} \approx 0{,}739085$$

<u>Kontrolle Formel (2):</u>

$$d = \frac{c\cdot y_0}{c - x_0} = \frac{(-1)\cdot 2\rho\sqrt{1-\rho^2}}{-1-(1-2\rho^2)} = \frac{\cancel{(-2)}\cdot\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\cancel{(-2)}(1-\rho^2)} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Kontrolle Formel (5):

$$c = \frac{\arccos x_0 - \pi/2}{y_0} = -1 \Rightarrow y_0 = \pi/2 - \arccos x_0 \approx 0,739085$$

Zusammenfassung: Beim „Wurstradlproblem“ (r = 1) sind hinsichtlich der Lage der Schnittgeraden g: x/c + y/d = 1 zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Für $|c| \geq 1$ ist g immer eine Tangente an den Kreis in Ursprungslage mit dem Radius $\rho \approx 0,4039727$

Fall 2: Für $|c| \leq 1$ gilt die Formel (5), aus der man, vom Schnittpunkt $P(x_0/y_0)$ ausgehend, den Parameter c und dann nach Formel (2) den Parameter d berechnen kann.

Der Parameter d nimmt für die zum begrenzenden Durchmesser parallele Lage von g mit $\rho \approx 0,4039727$ den kleinsten Wert an und wächst für $c \to 0$ monoton dem Grenzwert 0,5 entgegen.[2)]

Ergänzungen:

[1)] Die Berechnung des Schwerpunkts eines Halbkreises ist eine der schönsten Anwendungen der GULDIN‘schen Regel, die ich kenne. Die nämliche Regel lautet: Das Volumen eines Drehkörpers ist das Produkt aus dem Flächeninhalt des den Körper durch Drehung um eine Achse a erzeugenden Flächenstücks und dem Umfang des Kreises, welchen der Schwerpunkt S des Flächenstücks bei dieser Drehung beschreibt. Eine Kugel wird durch Drehung einer Halbkreisfläche um den sie begrenzenden Durchmesser erzeugt, der Abstand d des Schwerpunkts dieses Flächenstücks von der Drehachse ist der Radius des oben genannten Bahnkreises (Fig. 2). Daraus ergibt sich für r = 1:

$$V = \frac{4r^{\cancel{3}}\cancel{\pi}}{3} = \frac{\cancel{r^2}\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, d\, \cancel{\pi} \Rightarrow d = \frac{4r}{3\pi} \overset{r=1}{\Rightarrow} d = \frac{4}{3\pi} \approx 0,4244$$

[2)] Dieser aus der Anschauung gewonnene Grenzwert kann auch berechnet werden, wobei sich zunächst allerdings die unbestimmte Form „0/0“ ergibt. Hier hilft dann die Regel von de l‘HOSPITAL weiter. Nach ihr ist der Grenzwert eines Quotienten f(x)/g(x), der beim Einsetzen der kritischen Stelle die Form „0/0“ annimmt, mit dem Wert identisch, der sich beim Einsetzen dieser Stelle in den Quotienten der beiden ersten Ableitungen f‘(x)/g‘(x) ergibt. Das erfordert allerdings auch die Kenntnis der Ableitung des arccos x, die aber leicht herzuleiten ist.

a) Die Ableitung des arccos x:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Die Berechnung des Grenzwerts:

$$\lim_{c\to 0} d = \lim_{c\to 0}\frac{c\,y_0}{c-x_0} = \lim_{c\to 0}\frac{\dfrac{\arccos x_0 - \pi/2}{\cancel{y_0}}\cdot \cancel{y_0}}{\dfrac{\arccos x_0 - \pi/2}{y_0} - x_0}$$

$c \to 0$ ist gleichbedeutend mit $x_0 \to 0$ und $y_0 = \sqrt{1-x_0^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{c\to 0} d = \lim_{x_0\to 0}\frac{\arccos x_0 - \pi/2}{\dfrac{\arccos x_0 - \pi/2}{\sqrt{1-x_0^2}} - x_0} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“}\ (\arccos 0 = \frac{\pi}{2})$$

$$f(x) = \arccos x_0 - \pi/2 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g(x) = \frac{\arccos x_0 - \pi/2}{\sqrt{1-x_0^2}} - x_0 \Rightarrow g'(x) = \frac{\dfrac{-1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{1-x^2}} - (\arccos x - \pi/2)\cdot\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1-x^2} - 1 =$$

$$= \frac{-1 + \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x - \pi/2)}{1-x^2} - 1$$

$$\lim_{c\to 0} d = \lim_{x_0\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-1}{\dfrac{-1+0\cdot 1\cdot 0}{1} - 1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$