Das Triell-Problem

Von Dieter Grillmayer

Im Buch „Fermats letzter Satz" (DTV München, Oktober 2000) findet sich ein Problem, das ich bisher nicht gekannt habe und dessen hier vorgestellte Lösung eine Mischung aus „gesundem Hausverstand“ und Schulmathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung, geometrische Reihen) darstellt.

Bis ins 20. Jahrhundert hinein erfreute sich das Duell hoher gesellschaftlicher Akzeptanz, wenn es darum ging, einen Streit zu beenden, und in Wildwestfilmen ist das heute noch der Fall. Einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten, der Franzose Evariste Galois (1811 – 1832), starb 21-jährig an den Folgen eines Pistolenduells, in das er wegen eines Streits „um eine Dame zweifelhaften Rufs“ verwickelt war, wie in der „Geschichte der Mathematik“ (HPT Wien, 1998) berichtet wird. Und in Thomas Manns „Zauberberg“ kommen Settembrini und Naphta überein, ihren Streit über das richtige Welt- und Menschenbild durch ein Duell zu entscheiden. Dabei schießt Settembrini in die Luft, wie es seiner humanistisch-liberalen Grundeinstellung entspricht, was Naphta veranlasst, sich selbst zu erschießen. Ich erwähne das einleitend, weil die Settembrini-Strategie auch beim folgenden Triell-Problem erfolgversprechend ist.

Ein Triell unterscheidet sich von einem Duell dadurch, dass es dabei drei statt nur zwei Beteiligte gibt. Eines Morgens beschließen Herr Schwarz, Herr Grau und Herr Weiß, einen Streit durch ein Pistolentriell zu beenden, bei dem am Ende nur einer überleben darf. Herr Schwarz ist der schlechteste Schütze, denn er trifft sein Ziel durchschnittlich nur einmal in drei Versuchen. Herr Grau schießt besser, bei drei Versuchen trifft er zweimal. Herr Weiß ist der beste Schütze, er trifft immer. Um das Triell möglichst fair zu gestalten, darf Herr Schwarz als erster schießen, danach Herr Grau (wenn er noch lebt), dann Herr Weiß (wenn er noch lebt). Schließlich beginnt das Ganze von vorne, bis nur noch einer am Leben ist. Die Frage lautet nun: „Wie muss sich Herr Schwarz beim ersten Schuss verhalten, um seine Überlebenschance zu optimieren?“ lm oben genannten Buch wird als Lösung angegeben: „Er muss in die Luft schießen.“ Es wird jedoch nicht gesagt, warum. Wer den Beweis selber führen will, der darf hier nicht weiterlesen. Ich selbst habe drei Anläufe gebraucht, bis ich zu der folgenden, relativ kurzen und übersichtlichen Lösung gekommen bin.

Einschränkungen

Dabei habe ich mich im Wesentlichen darauf beschränkt, nur jene Möglichkeiten des Triell-Verlaufs nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchzugehen, die zu erwarten sind, sobald man Schwarz (S), Grau (G) und Weiß (W) eine zumindest durchschnittliche Intelligenz zubilligt. S darf zum Beispiel keinesfalls auf G schießen, denn falls er ihn trifft, und das ist immerhin zu einem Drittel wahrscheinlich, dann ist er mit dem nächsten Schuss ein toter Mann. Auch wird W, wenn er die Wahl zwischen S und G hat, sicher zuerst den gefährlicheren Gegner G ausschalten. Und deshalb muss G, solange W lebt, unbedingt auf ihn schießen.

Schießt S auf W, so ist sein weiteres Schicksal mit den Wahrscheinlichkeiten 1/3 (falls er trifft) bzw. 2/3 (falls er nicht trifft) belastet. Im Falle des Nichttreffens ist die nach dem ersten Schuss vorliegende Situation völlig gleich der, die eintritt, wenn S in die Luft schießt. Allerdings wurde diese Situation dann von S mit Sicherheit, also mit dem Wahrscheinlichkeitsfaktor p = 1, erzeugt und nicht nur mit einer 2/3-Wahrscheinlichkeit. (Außerdem hat er

W nicht verärgert, was aber unter der Voraussetzung, dass W vernünftig und nicht emotional entscheidet, irrelevant ist.)

Nach dieser Vorbetrachtung sind also nur die Folgen des Ausschaltens bzw. Nicht-Ausschaltens des sicheren Todesschützen W durch S durchzurechnen. Der Positiv-Fall läuft sofort auf ein Duell zwischen S und G hinaus, bei dem der bessere Schütze G beginnt, der Negativ-Fall läuft möglicherweise ebenfalls auf ein Duell zwischen S und G hinaus, nämlich dann, wenn G bei seinem ersten Schuss (mit der Wahrscheinlichkeit p = 2/3) den W ausschaltet; allerdings beginnt in diesem Fall der schlechtere Schütze S.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit von S bei einem Duell mit G

Der Ausgang des Duells ist für S günstig, wenn S trifft, bevor G trifft, und sei es auch nach noch so vielen Schusswechseln. Unter Benützung des Multiplikations- und des Additionssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung läuft das auf die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe nach der Formel s = 1 : (1 – q) hinaus, und zwar wie folgt:

Fall A: Der bessere Schütze G beginnt, trifft aber nie (p = 1/3), während S nach n = 0, 1, 2, ... vergeblichen Versuchen (p = 2/3) schließlich doch trifft (p = 1/3). Das ergibt als Wahrscheinlichkeit $p_A = 1/3 . 1/3$ (G trifft nicht, S trifft) + $1/3 . 2/3 . 1/3 . 1/3$ (S trifft beim zweiten Versuch) + $1/3 . 2/3 . 1/3 . 2/3 . 1/3 . 1/3$ (S trifft beim dritten Versuch) + ... = $1/9 . [1 + 2/9 + (2/9)^2 + ...] = 1/9 . [1 : (1 - 2/9)] = 1/9 . [1 : 7/9] = 1/7$.

Fall B: Der schlechtere Schütze S beginnt und trifft nach seinem ersten, zweiten, dritten, ... Schuss, während G (mit p = 1/3) nie trifft: $p_B = 1/3$ (S trifft beim ersten Versuch) + $2/3 . 1/3 . 1/3$ (S trifft beim zweiten Versuch) + $(2/9)^2 . 1/3$ (S trifft beim dritten Versuch) + ... = $1/3 . [1 + 2/9 + (2/9)^2 + ...] = 1/3 . [1 : 7/9] = 1/3 . 9/7 = 3/7$.

Verlauf 1: S schießt auf W und trifft (p = 1/3)

Nun kehren wir zum Triell zurück und untersuchen zunächst, was passiert, wenn S auf W schießt und trifft (p = 1/3). Dann folgt darauf ein Duell zwischen S und G gemäß Fall A, das mir einer 1/7-Wahrscheinlichkeit für S günstig verläuft. Die Überlebenswahrscheinlichkeit von S ist in diesem Fall also $1/3 . 1/7 = 1/21$, also ungefähr 5 %.

Verlauf 2: S schießt auf W und trifft nicht (p = 2/3)

In diesem Fall ist es schwieriger, für S eine Überlebensprognose zu stellen, weil das vom Ergebnis des zweiten Schusses, den G auf W abgibt, abhängig ist. Verlauf 2a: G trifft W (p = 2/3). Darauf folgt nun ein Duell zwischen S und G gemäß Fall B, das mit einer 3/7-Wahrscheinlichkeit für S günstig verläuft. Verlauf 2b: G trifft W nicht (p = 1/3). Dann erschießt W den G und S hat noch die 1/3-Chance, W zu erschießen.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Überleben des S beim Verlauf 2 berechnet sich also nach den Multiplikationssatz und dem Additionssatz wie folgt: $2/3 . (2/3 . 3/7 + 1/3 . 1/3) = 2/3 . (2/7 + 1/9) = 2/3 . 25/63 = 50/189$, also ungefähr 26 %.

Was passiert, wenn S in die Luft schießt?

Wenn S in die Luft schießt, dann verläuft das weitere Triell mit Sicherheit (p = 1) nach 2a oder 2b, also mit $2/3 \cdot 3/7 + 1/3 \cdot 1/3 = 25/63$ günstig für S, das sind ungefähr 40 %, um 9 % mehr als die ca. 5 % + 26 % ≈ 31 %, welche als Summe aus Verlauf 1 und Verlauf 2 herauskommen. Die in „Fermats letzter Satz“ aufgestellte Behauptung ist also richtig.

Eine schöne Kontrolle

Wie groß ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von G und W, wenn sich S so verhält, wie es für ihn am günstigsten ist? G hat nur dann eine Chance, wenn er W erschießt (p = 2/3) und dann das Duell gegen S gewinnt (p = 4/7), also $2/3 \cdot 4/7 = 8/21$, das sind ca. 38 %. W überlebt, wenn ihn weder G (p = 1/3) noch S (p = 2/3) trifft. Mit $1/3 \cdot 2/3 = 2/9$ oder ca. 22 % ist seine Überlebenswahrscheinlichkeit am geringsten. 40 % + 38 % + 22 % = 100 % ist eine schöne Kontrolle.