Regelm. geometrische Körper in allgem. Lage, deren Ecken ganzzahlige Koordinaten haben

Von Dieter Grillmayer

Die „schönen“ Ergebnisse der Rechnung und die einfache Kontrolle der Zeichengenauigkeit weisen solche Objekte als besonders geeignet für eine sowohl rechnerische als auch zeichnerische Behandlung (Darstellung in zugeordneten Normalrissen) aus. Die folgenden fünf Beispiele sind von Hofrat Dr. Josef LAUB im Zuge der Arbeit am Lehrbuch „dg7“ von Laub-Grillmayer entwickelt worden. Die dabei angewandte Methode wird im Anschluss an die Angaben erläutert.

1. Regelmäßiges Tetraeder ABCD: A(8/6/1), B(5/11/9), C(0/y<6/z), D(x/y/z>9)
a) Stelle das Objekt in Grund- und Aufriss dar! (0,10,16,14)
b) Berechne die Koordinaten der Ecken C und D!
Ergebnis: C(0/3/6), D(9/2/10)

2. Regelmäßiges Oktaeder ABCDEF: A(10/1/9); die Raumdiagonale EF liegt auf der Symmetrieachse a durch P(3/1/-5) und Q(8/8,5/10)
a) Stelle das Objekt in Grund- und Aufriss dar! (3,14,15,14)
b) Berechne die Koordinaten der Ecken B, C, D, E und F!
Ergebnis: B(13/9/4), C(4/13/5), D(1/5/10), E(9/10/13), F(5/4/1)

3. Würfel ABCDEFGH: H(7,5/1/7) ist der Halbierungspunkt der Kante AE und die zu AE parallele Symmetrieachse a des Körpers enthält die Punkte P(7/6,5/9,5) und Q(2,5/3,5/0,5)
a) Stelle das Objekt in Grund- und Aufriss dar! (1,12,17,13)
b) Berechne die Koordinaten aller Würfelecken!
Ergebnis: A(6/0/4), B(8/6/1), C(2/9/3), D(0/3/6), E(9/2/10), F(11/8/7), G(5/11/9), H(3/5/12)

4. Quadratische Pyramide ABCDS: A(0/12/6), S(14/5/13); die Symmetrieachse a durch S enthält den Punkt P(2/29/5)
a) Stelle das Objekt im Maßstab 1 : 2 in Grund- und Aufriss dar! (1,9,17,11)
b) Berechne die Koordinaten der Ecken B, C und D!
Ergebnis: B(12/16/0), C(16/22/12), D(4/18/18)

5. Sechsseitige Pyramide ABCDEFS: A(6/14/17), S(18/0/18); die Symmetrieachse a durch S enthält den Punkt P(0/18/0)
a) Stelle das Objekt im Maßstab 1 : 2 in Grund- und Aufriss dar! (5,12,14,10)
b) Berechne die Koordinaten der Ecken B, C, D, E und F!
Ergebnis: B(1/6/14), C(4/1/6), D(12/4/1), E(17/12/4), F(14/17/12)

Satz: Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ der „Bauart“

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2.(a^2+d^2)-e \\ 2.(ab+cd) \\ 2.(ac-bd) \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.(ab-cd) \\ 2.(b^2+d^2)-e \\ 2.(bc+ad) \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2.(ac+bd) \\ 2.(bc-ad) \\ 2.(c^2+d^2)-e \end{pmatrix}$$

mit $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ und $d \in R$ sowie $e = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sind gleich lang und stehen paarweise aufeinander normal, bilden also ein „orthonormiertes Dreibein“.

Beweis durch Berechnung der Längen, die alle e sind, und Bilden der drei skalaren Produkte, die alle 0 sind.

Nimmt man für a, b, c und d ganze Zahlen, so sind die Vektoren ganzzahlig und die Koordinaten der Endpunkte der von einem Punkt A oder M mit ganzzahligen Koordinaten ausgehenden Vektoren u, v und w sind ebenfalls ganzzahlig. Damit ergibt sich die Lösung des Problems für Würfel (Ausgangspunkt A) und Oktaeder (Ausgangspunkt M) unmittelbar. Die Tetraederecken sind vier Würfelecken. Bei der quadratischen Pyramide geht man (wie beim Oktaeder) vom Quadratmittelpunkt M aus. Die Ecken des Sechsecks ergeben sich als Halbierungspunkte von sechs Würfelkanten. (Treten dabei Halbe auf, dann ist die doppelte Größe zu nehmen.)